УДК 517.9 + 514.7

И. А. Долгарев

ПОЛУЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОДУЛЯРНОГО ГАЛИЛЕЕВА ПРОСТРАНСТВА С СИБСОНОМ ПО КОЭФФИЦИЕНТАМ ИХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Аннотация. На основе коэффициентов квадратичных форм поверхности одулярного галилеева пространства с сибсоном (единственным 3-мерным нильпотентным одулем Ли) составлена система дифференциальных уравнений с частными производными, решение которой приводит к определению поверхности.

Ключевые слова: некоммутативное галилеево пространство, поверхность, коэффициенты квадратичных форм.

Abstract. As a result of solution of combined differential equations with partial derivatives we have surface of noncommutative Galilean space in sibson by value coefficients of quadratic forms.

Keyword: noncommutative Galilean space, surface, coefficients of quadratic forms.

В геометрии свойства поверхностей характеризуются некоторыми функциями или константами, получаемыми в процессе дифференцирования функций, задающих поверхности. Большой интерес представляет обратная задача: получение поверхностей, свойства которых описываются заданными функциями – коэффициентами квадратичных форм поверхности. Поверхностям сопоставляются квадратичные формы, их коэффициенты позволяют решать метрические задачи на поверхности, вычислить кривизну поверхностей, линий на поверхностях. Ставится задача – по коэффициентам квадратичных форм поверхности найти поверхность. В евклидовой геометрии эта задача решена, а именно доказана теорема Бонне о том, что поверхность определяется заданием коэффициентов ее первой и второй квадратичных форм [1]. Заданы шесть скалярных функций двух параметров – коэффициентов первой и второй квадратичных форм поверхности. Эти функции и их производные связывают три уравнения Гаусса-Петерсона-Кодацци. Требуется найти три скалярные функции двух параметров, являющиеся компонентами векторной функции, задающей поверхность в евклидовом пространстве. В галилеевом пространстве имеется четыре скалярные функции двух параметров – коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности и три уравнения Гаусса-Петерсона-Кодацци. Требуется найти две скалярные функции двух параметров, которые служат компонентами в общем случае одулярной функции, задающей поверхность в галилеевом пространстве. Поверхность галилеева пространства определяется векторным полем евклидовой плоскости, но при этом может получиться и поверхность в некоммутативной одулярной галилеевой геометрии.

Примеры получения одулярных поверхностей по евклидовым 2-мерным векторным полям с помощью дифференциальных уравнений содержатся в [2]. Основы дифференциальной геометрии некоммутативного одулярного пространства с сибсоном изложены в [3, 4]. Монография [4] рассматривает 3-мерные разрешимые действительные одули Ли и вейлевские одулярные пространства с этими одулями. Существует пять видов действительных разрешимых одулей Ли, к ним относится и абелев одуль Ли – линейное пространство. Вейлевские одулярные пространства обобщают аффинное пространство, имеют с ним общую аксиоматику. Вводя на одуле Ли галилееву норму, получаем галилеевы одулярные пространства. Среди них содержится и классическое пространство-время Галилея. Дифференциальная геометрия 3-мерного пространства-времени Галилея изложена в [4]. Отличные от пространства Галилея пространства с галилеевой нормой называются галилеевыми. Основная теорема теории поверхностей пространства Галилея, аналог теоремы Бонне, доказана в [5], подробные исследования проведены в [6]. Наиболее близким к пространству Галилея является одулярное галилеево пространство с растраном, растран – это одуль Ли, составленный из параллельных переносов и гомотетий аффинного пространства. Основная теорема теории поверхностей некоммутативного галилеева пространства с растраном доказана в [7]. Сибсон является единственным нильпотентным одулем Ли, он состоит из галилеевых движений.

Ниже доказывается аналог теоремы Бонне для поверхностей ЕС-пространства, т.е. галилеева пространства с касательным отображением о одуль Ли галилеевых движений. В процессе доказательства используются дифференциальные уравнения. Трудности в доказательстве связаны с тем, что полная кривизна поверхности ЕС-пространства не относится к внутренней геометрии поверхности и формулы Гаусса-Петерсона-Кодацци содержат, кроме коэффициентов квадратичных форм поверхности, еще дополнительные функции.

Рассмотрен также случай, в котором коэффициенты квадратичных форм поверхности являются постоянными величинами.

Поверхности ЕС-пространства изучаются в [3], одулярные галилеевы пространства описаны в [4]. Результаты описания поверхности ЕС-пространства по коэффициентам ее первой и второй квадратичных форм доложены на Лобачевских чтениях в Казанском университете в 2007 г. [8], о поверхностях одулярных галилеевых пространств сообщено в Международной школе-семинаре памяти Н. В. Ефимова в 2006 г. [9].

1 Сибсон и ЕС-пространство

1.1 Нормированный сибсон

Действительный 3-мерный сибсон Σ^3 определяется на многообразии $\mathbf{R}^3$ следующими операциями над тройками чисел, см. [4]:

$$(x, x^1, x^2) + (y, y^1, y^2) = (x + y, x^1 + y^1, x^2 + y^2);$$

$$t(x, x^1, x^2) = (xt, x^1 t, x^2 t + x x^1 \frac{(t-1)t}{2}), \; t \in \mathbf{R}.$$

Операция сложения некоммутативна. Элементы сибсона называются сибсами и обозначаются $\alpha, \beta, ..., \sigma, ...$ Пусть $\alpha = (1, 0, 0)$, $\beta = (0, 1, 0)$, $\gamma = (0, 0, 1)$. Имеется разложение

$$\sigma = (x, x^1, x^2) = x\alpha + x^1\beta + x^2\gamma.$$

Упорядоченное множество $\mathbf{Б} = (\alpha, \beta, \gamma)$ является базисом сибсона Σ^3. Сибсы $(x, 0, 0)$ составляют линейное пространство $\mathbf{L}^1$ над $\mathbf{R}$, сибсы $(0, x^1, x^2)$ составляют линейное пространство $\mathbf{L}^2$ над $\mathbf{R}$. Сибсон является полупрямой суммой линейных пространств: $\Sigma^3 = \mathbf{L}^2 \dashv \mathbf{L}^1$. На линейных пространствах $\mathbf{L}^1$, $\mathbf{L}^2$ определена евклидова норма, превращающая их в евклидовы пространства $\mathbf{V}^1$, $\mathbf{V}^2$. На сибсоне задается галилеева норма: галилеевой нормой $|\sigma|$ сибса $\sigma = (x, x^1, x^2)$ называется

$$|\sigma| = |x|, \text{ если } x \neq 0\,; \ |\sigma| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \text{ если } x = 0\,.$$

Компонента x всякого сибса является временной, компоненты x^1, x^2 являются пространственными.

Сибсон по сложению является нильпотентной группой Ли ступени 2. Как группа Ли, сибсон порождается двумя сибсами. Неперестановочные сибсы σ, ρ порождают сибсон Σ^3. Всякие два перестановочных сибса порождают 2-мерное евклидово векторное пространство или 2-мерное галилеево пространство.

1.2 Сибсонные функции

Сибсонная функция одного параметра является совокупностью трех действительных функций одного действительного параметра

$$\sigma(t) = (x(t), x^1(t), x^2(t)),\ t \in \mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}\,.$$

Считаем, что функции $x(t), x^1(t), x^2(t)$ есть функции класса C^3. Формула дифференцирования сибсонных функций такова:

$$\sigma'(t) = \left(x'(t), x'^1(t), x'^2(t) + x'\left(\frac{1}{2} x'^1 - x^1 \right) \right),$$

см. [4]. Сибсонная функция двух параметров – это тройка действительных функций двух действительных параметров:

$$\sigma(u,v) = (x(u,v), x^1(u,v), x^2(u,v)),\ (u,v) \in \mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}^2\,.$$

Рассматриваем функции класса C^3. Для функции $\sigma(u,v)$ частные производные находятся по правилу дифференцирования сибсонных функций одного параметра [4]. Смешанные производные второго порядка зависят от порядка дифференцирования: $\sigma_{uv} \neq \sigma_{vu}$.

1.3 ЕС-пространство

Рассматривается множество $\{A, B, ..., M, ...\}$ точек и сибсон Σ^3. Отображение пар точек (A, B) в сибсон Σ^3 удовлетворяет аксиомам Г. Вейля. Тем самым определяется вейлевское одулярное пространство – ВО-пространство с сибсоном [4]. ВО-пространство с нормированным сибсоном, п. 1.1, называется ЕС-пространством. Точка O и базис $\mathbf{Б} = (\alpha, \beta, \gamma)$ сибсона составляют репер ЕС-пространства $\mathbf{B} = (O, \alpha, \beta, \gamma)$. ЕС-пространство является одулярным галилеевым пространством-временем. Координаты сибса OM в базисе $\mathbf{Б}$ есть координаты точки M в репере $\mathbf{B}$. Если $OM = (x, x^1, x^2)$ – сибс в репере $\mathbf{B}$, то $M = (x, x^1, x^2)$. Компонента x всякой точки $M = (x, x^1, x^2)$ является временной, компоненты x^1, x^2 являются пространственными. ЕС-пространство является галилеевым пространством-временем. Расстояние $|AB|$ между точками A и B определяется как норма сибса AB. Координатная плоскость $< O, \beta, \gamma >$ ЕС-пространства является евклидовой, координатная плоскость $< O, \alpha, \gamma >$ является галилеевой; не существует плоскости, определяемой точкой O и сибсами α, β. Через всякую точку A ЕС-пространства проходит единственная евклидова плоскость $< A, \beta, \gamma >$. Всякая другая плоскость, проходящая через точку A, является галилеевой плоскостью. Существуют неколлинеарные точки, через которые не проходит никакой плоскости [3, 4].

1.4 Поверхности ЕС-пространства

Регулярная поверхность ЕС-пространства в естественной параметризации, см. [4], задается сибсонной функцией двух параметров:

$$\sigma(t,u) = (t, x(t,u), y(t,u)), \ (t,u) \in \mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}^2 . \tag{1}$$

u-линии поверхности $\sigma(t_0,u) = (t_0, x(t_0,u), y(t_0,u))$ являются линиями евклидовых плоскостей $t = t_0$ ЕС-пространства, t-линии поверхности $\sigma(t,u_0) = (t, x(t,u_0), y(t,u_0))$ есть кривые ЕС-пространства в естественной параметризации. Сибсы σ_t, σ_u порождают сибсон Σ^3, поэтому поверхность не обладает касательной плоскостью [3, 4]. Основные сведения о поверхностях ЕС-пространства содержатся в [3, 4].

Сибсонную функцию (1), задающую поверхность, запишем в виде двух составляющих:

$$\sigma(t,u) = t\alpha + \vec{r}(t,u) . \tag{2}$$

Составляющая $t\alpha$ является временной, t есть время; составляющая $\vec{r}(t,u) = (x(t,u), y(t,u))$ является пространственной. Функция $\vec{r}(t,u)$ – евклидова векторная функция, она является проекцией поверхности ЕС-пространства на евклидову плоскость $\mathbf{E}^2 =< O, \beta, \gamma >$. Для того чтобы задать поверхность в ЕС-пространстве в естественной параметризации, достаточно задать векторную функцию $\vec{r}(t,u)$.

Согласно правилу дифференцирования сибсонных функций, п. 1.2, производные первого порядка функции (1) равны

$$\sigma_t = \alpha + (x_t, y_t + \frac{1}{2}x_t - x) = \alpha + \vec{r}_t + \left(\frac{1}{2}x_t - x\right)\gamma, \ \sigma_u = (0, x_u, y_u) = \vec{r}_u , \tag{3}$$

здесь γ – третий сибс репера $\mathbf{B} = (O, \alpha, \beta, \gamma)$ ЕС-пространства. Единичный сибс нормали поверхности таков:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2}}(-y_u, x_u) . \qquad (4)$$

Производные второго порядка функции (1) равны:

$$\sigma_{tt} = \vec{r}_{tt} + \left(\frac{1}{2}x_{tt} - x_t\right)\gamma , \ \sigma_{tu} = \vec{r}_{tu} + \left(\frac{1}{2}x_{tu} - x_u\right)\gamma , \ \sigma_{ut} = \vec{r}_{ut} , \ \sigma_{uu} = \vec{r}_{uu} . \qquad (5)$$

Первая квадратичная форма поверхности есть

$$ds^2 = \begin{cases} dt^2, \text{если } t \neq \text{const}, \\ Edu^2, \text{если } t = \text{const}. \end{cases} \qquad (6)$$

Ненулевой, тождественно не равный единице коэффициент первой квадратичной формы поверхности таков:

$$E = x_u^2 + y_u^2 . \qquad (7)$$

Функция $E = E(t,u)$ называется еще метрической функцией поверхности галилеева пространства. Вторая квадратичная форма поверхности:

$$\text{II} = Adu^2 + 2Bdudt + Cdt^2 , \qquad (8)$$

ее коэффициенты

$$A = \vec{r}_{uu}\vec{n} , \ B = \vec{r}_{ut}\vec{n} , \ C = \left(\vec{r}_{tt} + (\frac{1}{2}x_{tt} - x_t)\gamma\right)\vec{n} . \qquad (9)$$

Полная кривизна поверхности равна

$$K = AC - B^2 . \qquad (10)$$

Деривационные формулы поверхности ЕС-пространства:

$$\sigma_{uu} = \vec{r}_{uu} = \frac{E_u}{2E}\vec{r}_u + A\vec{n} , \ \sigma_{ut} = \vec{r}_{ut} = \frac{E_t}{2E}\vec{r}_u + B\vec{n} ;$$

$$\sigma_{tu} = \frac{E_t + x_{tu}y_u - 2x_u y_u}{2E}\vec{r}_u + \left(B + \frac{x_{tu}x_u - 2x_u^2}{2E}\right)\vec{n} , \ \sigma_{tt} = C\vec{n} . \qquad (11)$$

1.5 Основные уравнения теории поверхностей ЕС-пространства

В работе [4] получены формулы Гаусса и Петерсона-Кодацци для поверхностей ЕС-пространства. Имеется два аналога формулы Гаусса:

$$K = \frac{E_t^2 - 2EE_{tt}}{4E} - \left(\frac{BE_t}{2\sqrt{E}} + B_t\sqrt{E} - C\sqrt{E}\right)\frac{x_u}{y_u} + \left(x_{tu} - \frac{1}{2}x_{ttu}\right)\frac{E}{y_u} ;$$

$$K = \frac{E_t^2 - 2EE_{tt}}{4E} - \left(\frac{BE_t}{2\sqrt{E}} + B_t\sqrt{E} - C\sqrt{E}\right)\frac{y_u}{x_u} ; \qquad (12)$$

и формулы Петерсона-Кодацци:

$$2E(B_u - A_t) = BE_{tt} - AE_t; \quad (13)$$

$$BE_t - 2E(C_u - B_t) = \sqrt{E}(2x_{tu} - x_{ttu})x_u. \quad (14)$$

Согласно формулам (12) полная кривизна поверхности не относится к внутренней геометрии поверхности ЕС-пространства.

2 Определение поверхности ЕС-пространства коэффициентами ее первой и второй квадратичных форм

2.1 Постановка задачи

В ЕС-пространстве рассматриваем поверхность, заданную сибсонной функцией $\sigma(t,u)$ (1) в естественной параметризации. Ее пространственная составляющая $\vec{r}(t,u)$ задана на односвязной области $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{E}^2$ евклидовой плоскости ЕС-пространства. Для поверхности (1) на области $\mathbf{D}$ определяются четыре скалярные функции класса C^2:

$$E = E(t,u) \geq 0,\ A = A(t,u),\ B = B(t,u),\ C = C(t,u), \quad (15)$$

являющиеся коэффициентами первой и второй квадратичных форм поверхности. Эти функции связывают уравнения Гаусса-Петерсона-Кодацци и выполняются четыре деривационные формулы (11) для производных второго порядка сибсонной функции (1). Ставим задачу: по заданным функциям (15) найти векторную функцию $\vec{r}(t,u)$ – пространственную составляющую поверхности ЕС-пространства, записанную в виде (2), чтобы эта поверхность имела первую и вторую квадратичные формы, коэффициенты которых есть функции (15). Для однозначного определения поверхности заданы начальные условия

$$\vec{r}(t_0,u_0) = \vec{a},\ \vec{r}_u(t_0,u_0) = \vec{b},\ \left|\vec{b}\right| = \sqrt{E},\ \vec{r}_t(t_0,u_0) = \vec{c}, \quad (16)$$

где $(t_0,u_0) \in \mathbf{D}$ и $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – известные векторы, причем векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ неколлинеарны.

Так как $\vec{r}(t,u)$ – векторная функция, то выполняется следующее условие.

Условие (p). *Компоненты* $x(t,u), y(t,u)$ *функции* $\vec{r}(t,u)$ *удовлетворяют обычным условиям* C^2*-функций: смешанные производные этих функций не зависят от порядка дифференцирования.*

Сформулированная задача сводится к доказательству теоремы, аналогичной теореме Бонне, см. [1], евклидовой геометрии.

Основная теорема. *Если на односвязной области* $\mathbf{D}$ *евклидовой плоскости заданы функции* (15) *класса* C^2, *для них выполнены условия* (12)–(14), *то на области* $\mathbf{D}$ *существует функция* $\vec{r}(t,u) = (x(t,u), y(t,u))$, *являющаяся евклидовой, т.е. пространственной составляющей сибсонной функции* $\sigma(t,u) = t\alpha + \vec{r}(t,u)$, *задающей поверхность в ЕС-пространстве, единственную, удовлетворяющую условиям* (16), *первой и второй квадратичными фор-*

мами которой являются (6) *и* (8), *коэффициенты которых совпадают со значениями заданных функций* (15) *в точках области* **D** .

Доказательство теоремы содержится в п. 2.3–2.5.

2.2 Системы дифференциальных уравнений с частными производными

Определить компоненты векторной функции $\vec{r}(t,u)$ по функциям (15) можно на основе формул (3), (4), (8), (10), составив по ним систему дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\begin{cases} \vec{r}_u^{\,2} = E, \\ \vec{r}_{tu} + (\frac{1}{2}x_{tu} - x_u)\gamma = \dfrac{E_t + x_{tu}y_u - 2x_u y_u}{2E}\vec{r}_u + \left(B + \dfrac{x_{tu}x_u - 2x_u^2}{2E}\right)\vec{n}, \\ \vec{r}_{tt} + (\frac{1}{2}x_{tt} - x_t)\gamma = C\vec{n}. \end{cases} \tag{17}$$

Это система уравнений в векторной форме. Второе уравнение системы получено из второй формулы в (5) и третьей деривационной формулы в (11). Третье уравнение системы получено из первой формулы в (5) и четвертой деривационной формулы в (11). Формулы (12), (13) представляют собой условия интегрируемости системы уравнений (17), к ним относится и условие (p).

Второе и третье уравнения в (17) запишем в компонентах входящих в них векторных функций. Для компонент векторов из второго уравнения с учетом (4) и $\gamma = (0,1)$, как евклидова вектора, выполняются равенства:

$$x_{tu} = \frac{E_t + x_{tu}y_u - 2x_u y_u}{2E}x_u + \left(B + \frac{x_{tu}x_u - 2x_u^2}{2E}\right)\left(-\frac{y_u}{\sqrt{E}}\right); \tag{18}$$

$$y_{tu} + \frac{1}{2}x_{tu} - x_u = \frac{E_t + x_{tu}y_u - 2x_u y_u}{2E}y_u + \left(B + \frac{x_{tu}x_u - 2x_u^2}{2E}\right)\frac{x_u}{\sqrt{E}}. \tag{19}$$

Перепишем (18) в виде

$$x_{tu} = \frac{E_t}{2E}x_u + \frac{x_{tu} - 2x_u}{2E}y_u x_u - \frac{B}{\sqrt{E}}y_u - \frac{x_{tu} - 2x_u}{2E}y_u x_u,$$

отсюда получаем

$$x_{tu} = \frac{E_t}{2E}x_u - \frac{B}{\sqrt{E}}y_u. \tag{20}$$

В равенстве (19) производим тождественные преобразования.

$$y_{tu} + \frac{1}{2}x_{tu} - x_u = \frac{x_{tu}y_u^2 - 2x_u y_u^2 + x_{tu}x_u^2 - 2x_u x_u^2}{2E} + \frac{E_t}{2E}y_u + B\frac{x_u}{\sqrt{E}};$$

$$y_{tu} + \frac{1}{2}x_{tu} - x_u = \frac{x_{tu}(x_u^2 + y_u^2) - 2x_u(x_u^2 + y_u^2)}{2E} + \frac{E_t}{2E}y_u + B\frac{x_u}{\sqrt{E}}.$$

С учетом $E = x_u^2 + y_u^2$, см. (6), получаем

$$y_{tu} = \frac{E_t}{2E} y_u + \frac{B}{\sqrt{E}} x_u . \tag{21}$$

Третье векторное уравнение системы (17) легко заменяется двумя покомпонентными уравнениями и система векторных уравнений (17) эквивалентна следующей системе дифференциальных уравнений с частными производными, куда вошли уравнения (20) и (21):

$$\begin{cases} E = x_u^2 + y_u^2, \\ x_{tu} = \dfrac{E_t}{2E} x_u - \dfrac{B}{\sqrt{E}} y_u, \\ y_{tu} = \dfrac{E_t}{2E} y_u + \dfrac{B}{\sqrt{E}} x_u, \\ x_{tt} = \dfrac{C}{\sqrt{E}} y_u, \\ y_{tt} + \dfrac{1}{2} x_{tt} x_u - x_t x_u = \dfrac{C}{\sqrt{E}} x_u . \end{cases} \tag{22}$$

Составляющие $x(t,u), y(t,u)$ сибсонной функции $\sigma(t,u) = t\alpha + {}$ $+ (x(t,u), y(t,u))$ являются решением системы дифференциальных уравнений с частными производными (22).

В доказательстве основной теоремы используются заданные функции – коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности. Эти функции не являются производными искомых функций, описывающих поверхность, но выражаются через них. Поэтому сначала отыскиваются частные производные $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_t$ неизвестной функции $\vec{r}(t,u)$ по коэффициентам квадратичных форм поверхности с использованием деривационных формул поверхности и уравнений Гаусса-Петерсона-Кодацци. Затем по найденным функциям $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_t$ находится функция $\vec{r}(t,u)$. В этом состоит метод последовательного интегрирования системы уравнений (22).

Функция $\vec{r}_u(t,u)$ для поверхности ЕС-пространства отыскивается так же, как для поверхности коммутативного пространства Галилея [5]. Условия нахождения функции $\vec{r}_t$ осложняются тем, что деривационные формулы поверхности и уравнения Петерсона-Кодацци содержат не только заданные функции E, A, B, C, но и отдельные компоненты функций $\vec{r}_{tt}$, $\vec{r}_t$. Чтобы найти функции x_t, y_t – компоненты функции $\vec{r}(t,u)$, приходится решать вспомогательные дифференциальные уравнения в частных производных, затем используется условие (p). После этого возникают уравнения с полным дифференциалом функций $x(t,u), y(t,u)$.

2.3 Функция $\vec{r}_u$

Согласно виду формулы (6) для коэффициента E первой квадратичной формы поверхности обозначим

$$x_u = \sqrt{E}\cos w,\ y_u = \sqrt{E}\sin w, \tag{23}$$

где $w = w(t,u)$ – функция, которую предстоит найти. Как в [5], находим по второму и третьему уравнениям системы (22)

$$w_u = \frac{A}{\sqrt{E}},\ w_t = \frac{B}{\sqrt{E}}; \tag{24}$$

на основе (13) получаем уравнение с полным дифференциалом:

$$\frac{A}{\sqrt{E}}du + \frac{B}{\sqrt{E}}dt = 0,$$

решением которого является функция $w = w(t,u)$. Начальные условия, см. (16), определяют единственную функцию

$$\vec{r}_u(t,u) = (\sqrt{E}\cos w, \sqrt{E}\sin w). \tag{25}$$

Теперь единичный вектор нормали поверхности есть (согласно (4) и (24))

$$\vec{n} = (-\sin w, \cos w). \tag{26}$$

2.4 Функция $\vec{r}_t(t,u)$

Функцию $\vec{r}_t$ пространственной составляющей поверхности $\sigma(t,u)$ (1) находим по компонентам производных второго порядка σ_{tu}, σ_{tt}, сибсонной функции $\sigma(t,u)$, входящим в систему уравнений (22). Сначала мы отыщем векторные функции $\vec{r}_{tu}$ и $\vec{r}_{tt}$, а затем функцию $\vec{r}_t$ будем находить по ее производным $\vec{r}_{tu}$ и $\vec{r}_{tt}$ по условию (p) из п. 2.1. В третье уравнение системы (22), т.е. в уравнение (20), подставляем уже найденные функции (23):

$$x_{tu} = \frac{E_t}{2E}\cos w - B\sin w.$$

Интегрируем равенство по параметру u, в результате в качестве постоянного слагаемого интегрирования имеем функцию $c_1(t)$ параметра t:

$$x_t = \int\left(\frac{E_t}{2\sqrt{E}}\cos w - B\sin w\right)du + c_1(t). \tag{27}$$

Для нахождения функции $c_1(t)$ воспользуемся четвертым уравнением системы (22); дифференцируем (27) по параметру t:

$$x_{tt} = \left(\int\left(\frac{E_t}{2\sqrt{E}}\cos w - B\sin w\right)du + c_1(t)\right)_t = -C\sin w. \tag{28}$$

Получаем

$$c_1'(t) = -C\sin w - \left(\int\left(\frac{E_t}{2\sqrt{E}}\cos w - B\sin w\right)du\right)_t,$$

$$c_1(t) = -\int C\sin w - \int\left(\frac{E_t}{2\sqrt{E}}\cos w - B\sin w\right)du .$$

Подставляя $c_1(t)$ в (27), находим

$$x_t = -\int C\sin w dt + c_2 . \tag{29}$$

По третьему уравнению системы (22), т.е. по уравнению (21), с использованием функций (23) получаем

$$y_t = \int\left(\frac{E_u}{2\sqrt{E}}\sin w + B\cos w\right)du + c_3(t) .$$

По аналогии с предыдущим, привлекая пятое уравнение из (22) и выражения (28), (29), имеем функцию

$$y_t = \int C\cos w dt + \frac{1}{2}\int C\sin w dt - \int\left(\int C\sin w dt\right)dt - c_4 t + c_5 . \tag{30}$$

Таким образом, найдена векторная функция $\vec{r}_t = (x_t, y_t)$, ее компоненты есть функции (29) и (30). По начальному условию $\vec{r}_t(t_0, u_0) = \vec{c}(c^1, c^2)$ из (16) определяется единственная функция $\vec{r}_t$, для которой $x_t(t_0, u_0) = c^1$, $y_t(t_0, u_0) = c^2$.

2.5 Отыскание функции $\vec{r}$

Согласно условию (*p*) из п. 2.1 имеем уравнения с полным дифференциалом

$$x_u du + x_t dt = 0 , \; y_u du + y_t dt = 0 .$$

Функции x_u, y_u, x_t, y_t найдены в п. 2.3, 2.4. Решения указанных уравнений составляют векторную функцию

$$\vec{r}(t,u) = (x(t,u), \; y(t,u)) .$$

Начальное условие $\vec{r}(t_0, u_0) = \vec{a}(a^1, a^2)$, см. (16), выделяет единственную функцию, определяемую функциями (3) и (5).

2.6 Поверхность с заданными коэффициентами квадратичных форм

Условия основной теоремы из п. 2.1 обеспечивают существование единственной функции $\vec{r}(t,u) = (x(t,u), \; y(t,u))$, отыскиваемой в п. 2.5. Следовательно, существует единственная поверхность

$$\sigma(t,u) = (t, x(t,u), y(t,u)) , \; (t,u) \in \mathbf{D} \subseteq \mathbf{E}^2 ,$$

EC-пространства, определяемая функциями (15) и удовлетворяющая начальным условиям (16). По условиям основной теоремы в п. 2.1 найдена функция $\vec{r}_u(x_u, y_u) = (x_u(t,u), y_u(t,u))$. При этом $\sigma_u = \vec{r}_u$. Получены

$$x_u = \sqrt{E}\cos w , \; y_u = \sqrt{E}\sin w , \; \vec{n} = (-\sin w, \cos w) .$$

Вычисляем:

$$\vec{r}_u^{\,2} = x_u^2 + y_u^2 = E\,,$$

т.е. найденная поверхность $\sigma(t,u)$ имеет первую квадратичную форму с заданным в (15) коэффициентом $E = E(t,u)$. Поверхность $\sigma(t,u)$ имеет вторую квадратичную форму с заданными коэффициентами A, B, C. Это следует из того, что для поверхности сначала найдена производная $\sigma_u = \vec{r}_u$, п. 2.3, по которой получаем $\sigma_{uu} = \vec{r}_{uu} = (-A\sin w, A\cos w)$. Следовательно, $\sigma_{uu}\vec{n} = \vec{r}_{uu}\vec{n} = A$, результат совпадает со второй заданной функцией в (15).

Кроме того, найдена функция $\vec{r}_{ut}$, компоненты которой есть (20) и (21), вместе с (23) имеем:

$$\vec{r}_{ut} = \left(\frac{E_t}{2\sqrt{E}}\cos w - B\sin w, \frac{E_t}{2\sqrt{E}}\sin w - B\cos w\right),$$

см. (29), (21) и (23). Таким образом,

$$\vec{r}_{ut}\vec{n} = B\,,$$

для векторной функции $\vec{r}$ выполняется $\vec{r}_{tu} = \vec{r}_{ut}$. Коэффициент B второй квадратичной формы поверхности $\sigma(t,u)$ совпадает с третьей заданной в (15) функцией.

Производная σ_{tt}, см. (5), и четвертая формула в (11), используемая в п. 1.5 при нахождении функции $\vec{r}_t$ и входящая в условия основной теоремы, дают

$$\sigma_{tt}\vec{n} = C\vec{n}\vec{n} = C\,.$$

Коэффициент C второй квадратичной формы найденной поверхности $\sigma(t,u)$ совпадает с заданной в (15) функцией $C = C(t,u)$, определяющей поверхность $\sigma(t,u)$.

Как показывают равенства (29) и (30) и предшествующие им формулы, функции x_t, y_t, а значит, и $y = y(t,u)$, могут быть выражены или через функции B, E, или через функцию C. Их связывает вторая формула для полной кривизны ЕС-пространства в (12), что и дает зависимость между различными выражениями для функции y_t. Пример использования второй формулы в (12) имеется ниже.

3 Поверхность ЕС-пространства, коэффициенты квадратичных форм которой постоянны

3.1 Теорема для поверхности, имеющей постоянные коэффициенты квадратичных форм

По основной теореме, п. 2.1, функции $E(t,u), A(t,u), B(t,u), C(t,u)$ (15) – коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности и начальные условия (16) однозначно определяют поверхность ЕС-пространства. Пусть коэффициенты квадратичных форм поверхности постоянны, т.е. функции A, B, C (15) постоянны. В этом случае определяется поверхность конкретного вида, она описывается следующей теоремой.

Теорема. *Если коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности ЕС-пространства постоянны, то поверхность является аналогом квазиплоскости. В этом случае* $E \neq 0, A = B = 0, C \neq 0$. *Поверхность задается сибсонной функцией*

$$\sigma(t,u) = \left(t, u\sqrt{E}\cos c_0 + at + C_1, u\sqrt{E}\sin c_0 + \frac{1}{2}bt^2 + C_2 t + C_3 \right),$$

это цилиндрическая поверхность с евклидовой образующей, направляющая которой является галилеевым циклом.

Квазиплоскости изучаются в [3]. Поверхность, определяемая точкой и двумя некоммутирующими сибсами, называется квазиплоскостью. Плоскость определяется точкой и двумя коммутирующими сибсами. Доказательству теоремы посвящены п. 3.2–3.5.

3.2 Производные по пространственному параметру

Полная кривизна поверхности описывается формулами Гаусса (12), в каждом слагаемом первой из формул содержатся как сомножители, производные коэффициентов квадратичных форм поверхности, которые равны нулю, т.к. коэффициенты постоянны. Следовательно, такая поверхность имеет нулевую полную кривизну:

$$K = AC - B^2 = 0 .$$

Для функции $\vec{r}_u = (x_u, y_u)$ в п. 2.3 получено

$$x_u = \sqrt{E}\cos w,\ y_u = \sqrt{E}\sin w,\ w_u = \frac{A}{\sqrt{E}},\ w_t = \frac{B}{\sqrt{E}}. \tag{31}$$

Функция $w = w(t,u)$ получается в результате решения уравнения с полным дифференциалом

$$\frac{A}{\sqrt{E}}du + \frac{B}{\sqrt{E}}dt = 0 ;$$

в случае постоянных коэффициентов его решением является функция

$$w = \frac{A}{\sqrt{E}}u + \frac{B}{\sqrt{E}}t + c_0,\ c_0 = \text{const} . \tag{32}$$

Вычисляем: $|\vec{r}_u| = \sqrt{E}$. Поверхность с выписанной производной (x_u, y_u) пространственной составляющей имеет в первой квадратичной форме заданный коэффициент E. Единичный вектор нормали поверхности равен $\vec{n} = (-\sin w, \cos w)$, см. (26). По функциям x_u и y_u находим компоненты функции $\vec{r}$:

$$x = \sqrt{E}\int \cos w du = \frac{E}{A}\sin w + C_1(t),\ y = \sqrt{E}\int \sin w du = \frac{B\sqrt{E}}{A}\cos w + C_2(t). \tag{33}$$

При интегрировании по параметру u получается слагаемое, зависящее от параметра t.

Полученные выражения (33) предстоит уточнить, функции $C_1(t), C_2(t)$ найти.

3.3 Производные по времени. Пространственная составляющая

По функциям (33) находим

$$x_t = \frac{B\sqrt{E}}{A}\cos w + C_1'(t)\,,\ y_t = \frac{B\sqrt{E}}{A}\sin w + C_2'(t)\,;$$

$$x_{tt} = \frac{B^2}{A}\sin w + C_1''(t)\,,\ y_{tt} = \frac{B^2}{A}\cos w + C_2''(t)\,.$$

Из $K = AC - B^2 = 0$ получаем $B^2 = AC$. Тогда по (5)

$$\sigma_{tt} = \left(0, x_{tt}, y_{tt} + \frac{1}{2}x_{tt} - x_t\right) =$$

$$= \left(-C\sin w + C_1''(t), C\cos w + C_2''(t) - \frac{1}{2}C\sin w + \frac{1}{2}C_1''(t) + \frac{B\sqrt{E}}{A}\cos w + C_1'(t)\right).$$

Далее получаем:

$$\sigma_{tt}\vec{n} = C = C - C_1''(t)\sin w + C_2''(t)\cos w - \frac{1}{2}C\sin w\cos w +$$

$$+\frac{1}{2}C_1''(t)\cos w - \frac{B\sqrt{E}}{A}\cos^2 w - C_1'(t)\cos w\,.$$

Значит,

$$\left(-C_1''(t) - \frac{1}{2}C\cos w\right)\sin w + \left(C_2''(t) + \frac{1}{2}C_1'' - \frac{B\sqrt{E}}{A}\cos w - C_1'(t)\right)\cos w = 0\,.$$

Для выполнения этого равенства каждый из множителей при $\sin w$ и $\cos w$ должен обращаться в нуль. Имеем по первому слагаемому:

$$-C_1''(t) - \frac{1}{2}C\cos w = 0\,,\ C_1''(t) = -\frac{1}{2}C\cos w\,.$$

Функция $C_1(t)$ зависит только от параметра t, поэтому в (32) отсутствует слагаемое, содержащее параметр u, что возможно только при $A = 0$. Так как $AC - B^2 = 0$, то $B = 0$. По (32) имеем, что w – постоянная величина:

$$w = c_0\,.$$

Снова находим функции $x(t,u), y(t,u)$, см. (33), при найденном значении $w = c_0$:

$$x = u\sqrt{E}\cos c_0 + C_1(t)\,,\ y = u\sqrt{E}\sin c_0 + C_2(t)\,; \qquad (34)$$

тогда

$$x_t = C_1'(t), y_t = C_2'(t), \ x_{tt} = C_1''(t), y_{tt} = C_2''(t);$$

$$C = \sigma_{tt}\vec{n} = C_1''(t)\sin c_0 + (C_2''(t) + \frac{1}{2}C_1'(t) - C_1'(t))\cos c_0.$$

Значение C постоянно, следовательно, $C_1''(t), C_2''(t)$ и $C_1'(t)$ постоянны. Обозначим: $C_1'(t) = a$, $C_2''(t) = b$. Отсюда

$$C_1(t) = at + C_1, \ C_2(t) = \frac{1}{2}t^2 + C_2 t + C_3.$$

По (34) получаем компоненты пространственной составляющей поверхности $\sigma(t,u)$.

3.4 Поверхность

Поверхность одулярного ЕС-пространства задается функцией (2), см. п. 1.4, $\sigma(t,u) = t\alpha + (x(t,u), y(t,u))$, функции $x(t,u), y(t,u)$ только что найдены в конце предыдущего пункта, поэтому отыскиваемая поверхность такова:

$$\sigma(t,u) = \left(t, u\sqrt{E}\cos c_0 + at + C_1, u\sqrt{E}\sin c_0 + \frac{1}{2}bt^2 + C_2 t + C_3 \right),$$

как указано в теореме. В предыдущем параграфе в основной теореме установлено, что функции $E(t,u), A(t,u), B(t,u), C(t,u)$ определяют поверхность некоммутативного галилеева пространства с сибсоном. В частности, это относится и к случаю, в котором функции A, B, C постоянны. Начальные условия вида (16) определяют единственную поверхность.

Выше найдены поверхности ЕС-пространства по заданным коэффициентам их квадратичных форм, т.е. для поверхностей ЕС-пространства доказан аналог теоремы Бонне в евклидовой геометрии.

Список литературы

1. **Позняк, Э. Г.** Дифференциальная геометрия / Э. Г. Позняк, Е. В. Шикин – М. : Изд-во МГУ, 1990. – 384 с.
2. **Долгарев, А. И.** Дифференциальные уравнения поверхностей одулярных пространств. Нормальная кривизна поверхности / А. И. Долгарев // Труды Средневолжского математического общества. – Саранск : СВМО. – 2004. – Т. 6. – № 1. – С. 132–144.
3. **Долгарев, А. И.** Поверхности в дифференциальной геометрии пространства с касательным отображением в одуль галилеевых движений / А. И. Долгарев. – Саранск : Средневолжское математическое общество, 2003. – Препринт 62. – 40 с.
4. **Долгарев, А. И.** Классические методы в дифференциальной геометрии одулярных пространств : монография / А. И. Долгарев. – Пенза : Информационно-издательский центр ПензГУ, 2005. – 306 с.
5. **Долгарев, И. А.** Нахождение поверхности в пространстве Галилея по ее квадратичным формам / И. А. Долгарев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. – 2006. – № 5 (26). – С. 51–60. – (Естественные науки).

6. **Долгарев, И. А.** Системы дифференциальных уравнений в частных производных для поверхностей пространства Галилея : дис. … канд. физ.-мат. наук / И. А. Долгарев. – Пенза : Изд-во ПензГУ, 2007. – 120 с.
7. **Долгарев, И. А.** Получение поверхности 3-мерного галилеева пространства с растраном по коэффициентам ее квадратичных форм / И. А. Долгарев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. – 2007. – № 6 (33). – С. 17–31. – (Естественные науки).
8. **Долгарев, И. А.** Система дифференциальных уравнений с частными производными для поверхностей в некоммутативном галилеевом пространстве с сибсоном / И. А. Долгарев // Лобачевские чтения – 2007 : труды математического центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань : Изд-во КМО-КГУ, 2007. – Т. 36. – С. 16–19.
9. **Долгарев, И. А.** Получение поверхностей 3-мерных одулярных галилеевых пространств по заданным коэффициентам их квадратичных форм / И. А. Долгарев // Международная школа-семинар по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова : труды участников. – Ростов-на-Дону, 2006. – С. 38–39.

Долгарев Иван Артурович
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики и суперкомпьютерного моделирования Пензенский государственный университет

Dolgarev Ivan Arturovich
Candidate of physico-mathematical sciences, associate professor, sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University

E-mail: delivar@yandex.ru

УДК 517.9 + 514.7
Долгарев, И. А.
Получение поверхностей одулярного галилеева пространства с сибсоном по коэффициентам их квадратичных форм / И. А. Долгарев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 2 (10). – С. 68–82.